BNEJSS | *Balkan and Near Eastern Journal of Social Sciences*
Balkan ve Yakın Doğu Sosyal Bilimler Dergisi

Geyik, 2021: 07 (02)

Tenis Maçlarında Karar Alma: Oyuncuların Ralli Tercihleri ve Denge Ralli Uzunluklarının "Var-Yok" Davranışsal Oyun Modeliyle Tahmini

Ertuğrul Üstün GEYİK[1]

[1]Dr. Öğretim Üyesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, İİBF, İktisat Bölümü, eugeyik@nku.edu.tr, ORCID: 0000-0001-5832-3003

Özet: Davranışsal Oyun Teorisi'nde stratejik tercihlerin karmaşık olduğu ve genellikle çoklu dengenin oluştuğudurumlarda, bireylerin sınırlı rasyonel olduğu veya rasyonel olmadığı ve bireyi rasyonel olarak varsaymanın çıktıları açıklamada yetersiz kaldığı durumlarda kullanılabilecek modeller oluşturmaya çalışır. Bu modellerden biri de Var-Yok Dengesi Modelleridir. Oyuncuların rakipleriyle ya da oyunla ilgili genel olarak doğru kanaatleri olsa bile hamle hatası yapabildikleri bu tür oyunların tenis gibi hızlı düşünmeyi ve hamle yapmayı gerktiren bir oyunda çıktıları iyi açıklayabileceği düşünülmüş ve bu açıklam gücünü artırmak için modele oyuncuların rallileri kısaltma isteği bir iskonto faktörü olarak eklenmiş ve ayrıca tekil oyuncuların göreceli ralli başarı riskleri de modele dahil edilerek maçlardaki ralliler gerçek maç ralli uzunluklarına oldukça yakın tahmin edilebilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Var-Yok Modeli, Karar Alma, Davranışsal Oyun Teorisi

Decision Making In Tennis Matches: Players' Rally Preferences and Estimation Of Rally Lengths With Quantal Response Equilirium

Abstract: Behavioral Game Theory generally builds models for the cases where rationality assumptions do not explain the outcomes well. It is used for to explain the multiple equilibria cases where decision makers are either irrational or rationally bounded and the srtategic preferences are mixed. One of these models is Quantal Respoonse Equilibrium Model. These models assume that players may have the right beliefs about other players but may fail in some cases to give correct responses. This model may suit well for a game like tennis where decision makers with correct beliefs have to give fast and accurate responses in a short period of time. To explain the rally decisions better and to get higher precision of the match rally outcomes besides the average outcomes the motivation to shorten the rally and the risk of success is accresed to the model.

Keywords: Quantal Response Equilibrium, DecisionMaking, Behavioral Game Theory

1. GİRİŞ

Nash (1950)'ye göre sonlu sayıda oyuncu ve strateji için sonlu oyunlarda en az bir tane Nash Dengesi vardır. Ancak bu Nash dengesine ulaşabilmek için farklı durumlarda farklı yöntemler gerekebilir. Her ne kadar Oyun Teorisi ve rasyonel birey varsayımları teoride çok iyi açıklayıcı olsa da bazen pratikte varılan sonuçları açıklamak için ya tek başına yeterli olmaz ya da pratik çıktı ile örtüşmez.

Saf Nash Dengesi'nin yetersiz kaldığı böyle durumlarda; iletişim ve tekrarlı oyunlarda düzeltme işlemleri yine de oyunu bir Nash dengesine ulaştırabilir. Burada hangi sebebin Nash dengesine ulaştıracağı ise oynanacak oyuna ve duruma göre değişir.

Mahpuslar Çıkmazı oyununda Nash Dengesine ulaşmak için von Neumann Morgenstern yaklaşımında klasik bir rasyonel düşünce yeterlidir. Yani her oyuncunun baskın bir stratejisi varken veya iki oyunculu bir oyunda bir oyuncunun baskın bir stratejisi varken dengeye ulaşmak için rasyonellik varsayımı yeterli olur. Ancak özellikle birden fazla dengenin olduğu ve karışık stratejilerin yürütüldüğü oyunlarda (Cinsiyetler Savaşı, Geyik/Tavşan Avı gibi) rasyonellik denge için yetmez, dengeye ulaşabilmek için ya oyuncular arasında güvene dayalı bir iletişim ya da oyunun lider ve takipçi formatına bürünüp dinamik hale getirilmesi gerekir ki hem Nash Dengesine hem den etkin çözüme ulaşılabilsin. Yani rasyonelliğin yanına gelecekdeki hareketlerle ilgili ortak ve doğru bir kanı denge için yeterli olur.

İletişim ve tekrarlı oyunlarda düzeltme işlemleri doğru inancın oluşması içindir. İletişimin olmadığı durumlarda bile kişilerin ilk ortak kararlarının rasyonel dengeye yakın sonuçlar verebilmesi bazı durumlarda mümkündür. Bireysel tahminlerden yola çıkılarak doğru kanılar oluşturulabilir ve kanılar oyuncular tarafından paylaşılmış olur. Bu da diğer olası Nash Dengelerinden farklılaşan bir Nash Dengesine yakınsamayı sağlar (Shelling,1960). Shelling özelllikle Anlaşmazlık Teorisi ve işbirliği üzerine çalışmış ve bir ajanın rakibinden özel bir durumda daha iyi duruma gelebilmek için neler yapılması gerektiğini inceleyen bir disiplinin oluşmasını sağlamıştır. Bu noktada hem sıfır toplamlı hem de sıfır toplamlı olmayan oyunlarda karşılıklı bağımlılığı işbirliği ve çatışma için incelemiştir.

Birden fazla Nash Dengesi'nin olduğu oyunlarda Pareto sıralaması yapıldığında Pareto etkinliği daha düşük bir denge ortaya çıkıyorsa bu dengeye kötü denge denir. İşbirliği oyunlarında bu durum diğer bir sorun olarak koordinasyon başarısızlığı olarak karşımıza çıkar. Schelling ve birçok 2.Dünya Savaşını görmüş iktisatçı bu çıkar çatışması ilişkilerini incelerken savaşlarla ilişkilendirmişlerdir: Savaş her ne kadar şiddet içerse de bir pazarlık çeşididir ve anlaşmazlıklar kaçınılmaz olduğuna göre şiddeti minimize edecek ve görülecek zararı minimize edecek anlaşma/ denge bulunmalıdır.

İşbirliğinin olmasığı ve saf Nash Dengesi'nin olmadığı oyunlarda çıktıyı tahmin etmek ve dengeye varmak çok da kolay olmayabilir. Özellikle de karışık strateji oyunlarda çatışma kaçınılmazdır ve özellikle de tek dönemlik çıktı şansa bağlı olduğundan Nash'in incelediği simetrik oyunlardan daha *"ilgi çekici olan hamlelerdir, hamlenin olmadığı oyunlar değildir; asıl ilginç olan ise hamlelerin potansiyel asimetrisidir"* (Schelling, 1960). Her ne kadar Schelling sıfır toplamlı olmayan oyunlara odaklanmış olsa da yukarıda belirttiği "*hamle ve hamlenin asimetrisi*" sıfır toplamlı tekrarlı oyunları incelerken de önemlidir. Bu tür asimetriler sonucunda tekrarlı oyunların vardığı dengeler açıklanabilir.

Benzer şekilde birden fazla Nash Dengesinin olduğu oyunlarda spesifik bir Nash dengesine yaklaşmak bazen de oyunun tekrarı ve Alt Oyun Nash dengelerine ulaşmayla mümkün olabilir. Oyunun sahnelerinin yeni baştan sıralı olarak tekrar ve tekrar oynanması bir Nash Dengesini diğerlerinin önüne getirebilir. Özellikle Pareto etkin bir Nash Dengesi varsa tekrarlı oyunlar o Nash Dengesi'ne doğru kayılmasını sağlayabilir. *Asimetri* bu tür oyunlarda en az bir oyuncunun diğerlerinin ne bildiğinden oyun başında emin olmadığı durumu belirtir. Rakip firma maliyetleri, bir alım satım pazarlığında veya açık artırmada karşı tarafın biçtiği değer gibi değişkenler rakiplere direkt görünmese de oyunun çıktısını etkilerler. Harsanyi (1967) eksik bilgi altında normal form oyunları stratejilerin olasılıklarıyla genişleterek Bayesyen Oyunlarına ve Bayesyen Nash Dengesine varmıştır. Bu denge noktası çıktıların değil oynanacak stratejilerin çıktısıdır.

Sıfır toplamlı oyunlarda hiçbir oyuncu genel stratejisinin diğer oyuncular tarafından bilinmesini istemez, bu yüzden sadece rekabet ederken veya işbirliği yaparken maliyetlerini, bir ürün için pazarlık ederken almak/satmak isteyecekleri değeri değil aynı zamanda bu enformasyonu ortaya koyabilecek tekrarlanan stratejileri de ifşa etmek istemezler. Çünkü diğer oyuncuların stratejileriyle ilgili doğru kanı oluşturmaları aslında (sıfır toplamlı) oyunu kaybetmeleri anlamına gelebilir. Bu yüzden eğer oyuncular hem donanım hem de bilgi açısından asimetrik olduklarında oyunun nerede sonlanacağı tam bilinmez ama stratejiler istatistiksel olarak bilinilerek oyunun sonucu olasılıksal olarak bilinebilir.

Dinamik oyunlar tam bilgi altında çözülürken geri dönük çıkarımlarla Alt Oyun Nash Dengesine ulaşılabilir. Ancak eksik bilgi altında dinamik oyunların oynandığı durumlarda ise tüm oyun bir altoyundur. Alt oyunların eliminasyonu çok olası değildir çünkü akla uygun olmayan ya da *geçersiz tehditleri* ayıklamak mümkün değildir. Bu durumda oyuncuların kanıları incelenerek Bayesyen Nash'e benzer şekilde hangi olasılığı tercih edeceği bulunmaya ve Tam Bayesyen Nash Dengesine ulaşılmaya çalışılır. Her enformasyon kümesinde, hamle sırası kendinde olan oyuncunun oyunun hangi karar aşamasına gelindiğine dair bir kanaatinin olması gerekir. Daha netleştirirsek, birden fazla karar düğümü içeren bir oyunda, enformasyon kümesindeki karar düğümlerinin koşullu olasılıklarının dağılımına kanı denir; tek seçenekli enformasyon kümesi için, oyuncunun kanisi tek karar düğümüne tüm olasılığı verir. Birden fazla seçeneğin olduğu durumda ise bazı durumlarda çıktılar, bazı durumlarda ise hem çıktılar hem de o çıktının olma olasılığı kanılar tarafından belirlenir. Kanılar, karar alan her oyuncu bu kararı (tam ya da eksik) uyguladıktan sonra diğer oyuncu(lar) enformasyon setlerini revize eder ve karar düğümündeki karalarını belirlerler. Eğer beklenti ve rakibin hamlesi uyumlu ise buna denge patikası denir. Bu tür bir oyunda kısa vadeli her enformasyon değişiminde kanı değişmemelidir. Denge patikasındaki bir enformasyon kümesinde, kanılar ve denge stratejileri Bayesyen Kuralıyla belirlenir. Denge patikasının dışına çıkan bir enformasyon kümesinde ise, yani rakibin hamlesi beklentiye uymuyorsa kanılar ve denge stratejileri 'mümkün olduğunca' Bayesyen Kuralıyla belirlenir (Camerer and Ho, 1999).

Klasik Oyunlar Teorisi daha önce de yazıldığı gibibireyin rasyonelitesine bağlı iken dinamik eksik bilgi oyunlarında klasik rasyonalitenin ötesine geçmek gerekir. Dinamik oyunlarda, kanılar veri iken, oyuncuların stratejileri sıralı olarak rasyonel olmak zorundadır. Yani her hareket ve enformasyon seti için oyuncunun hamlesi ve diğer oyuncuların sıralı stratejileri oyuncunun o enformasyon setindeki kanılarına göre optimal olmalıdır. Verili enformasyon setine dayalı kanılar tüm diğer oyuncuların tüm ihtimallerini içeren bütüncül bir hareket planı oluşturur. Buna literatürde sıralı rasyonalite denmektedir (Selten, 1975).

Belirsizlik altında oynanan dinamik oyunlarda iki paragraf yukarıda bahsedilen kanıların tutarlılığı ve sıralı rasyonalite bir araya getirilerek yani bir Nash Tanımı yapılır. Bu Nash Dengesi tüm oyuncuların bütüncül hamle planlarından yani stratejilerden ve her enformasyon kümesi üzerinde tanımlı kanılardan oluşur. Yani her oyuncunun stratejisi diğer oyuncuların stratejileri ve kendi kanıları veri iken optimal hamleleri belirler ve kanılar olabildiğince Bayesyen Kuralıyla tutarlı oluşturulursa ortaya çıkacak Nash Dengesine Tam Bayesyen Nash Dengesi denir (Selten, 1975).

Oyun teorisi az sayıda oyuncuyla oynandığından oyuncuların çıktıları birbirleirne bağlıdır. Doğru kanı oluşturamayanlar ya da optimizasyon yapamayanlar oyunun çıktısını değiştirir. Yani rasyonel oyuncuların da kendi rasyonelliklerinin ötesine geçip sınırlı rasyonaliteyi çözümleyebilmeleri ve ölçebilmeleri gerekir. Bu durumda sıralı rasyonalitenin varlığı ve yoksa da oluşumu ancak deneylerle ve alan verileriyle gözlemlenebilir.

Bu çalışmada da karşılıklı iki oyuncunun sıralı ve olabildiğince rasyonel kararlar alabildiklerinin varsayılabileceği dinamik sıralı bir eksik enformasyon durumunda alan verisi kullanılarak çıktılar analiz edilecektir.

Davranışsal oyun teorisinin ilgi alanı ilk başta olası Nash dengelerine deneyler ve alan verileriyle de ulaşıp ulaşılamadığının araştırılmasıyla başlanmış; daha sonrasında gerçek davranış ve çıktıların çıktılarına ulaşacak model oluşturma ve denge tahmini oluşturmaya dönüşmüştür. Temelde davranışsal oyun teorisinde iktisadın ilgi alanına giren birkaç çeşit ana model vardır:

İdrak Hiyaerarşisi (CH) (Bilişsel Hiyerarşi) Modelleri düşünce adımlarıyla ilgili oyuncuların kanılarını derleyen modeller; tek atışlık oyunlarının sonuçlarını veya tekrarlı oyunların başlangıç koşullarını tahmin için kullaılırlar. Stratejik düşüncenin ortalama kaç adım olacağını tek parametre üzerinden tanımlarlar. LK Modeki olarak geçen türlerinde oyuncuların tekrarlanan düşüncenin adım sayısı k olarak tanımlanır ve ve karar kuralları ve kanıları bu tekrarlar üzerinden anlaşıklmaya çalışılır. Bu modellerde oyuncuların düşünceden uygulamaua geçerken hata yapmadıkları ancak diğer oyuncuların kaçıncı mertebeden düşüneceklerinin bilinmediği için düşünce tekrarının hem sınırlı rasyonaliteden hem de harcanacak efordan dolayı sınırlı olacağı düşünülmektedir (Camerer, Ho, ve Chong, 2003).

Var yok yanıt modelleri ise gürültülü optimizasyon modelleridir. Var yok modellerinde oyuncular küçük hatalar yapabilirler ancak diğer oyuncuların ne yapacağıyla ilgili doğru kanıları vardır. (Goeree and Holt, 1999).

Tecrübe Ağırlıklı Çekim Modellerinde, düşünce adımlarının zaman içinde nasıl değiştiği ve dengeye geldiği modele oyuncular için öğrenme değişkeni ilave edilerek ve model bu şekilde dinamikleştirilerek oluşturulur.

Bu tür modellerin daha karmaşık versiyonlarında stratejik öğretme ve denge dışı itibar oluşturmak gibi bir kısım oyuncunun adaptif öğrenici değil bu tür öğrenimden faydalanan karmaşık öğreticiler olduğu modellerdir.

Son olarak bir grup modelde de parasal çıktılarların fayda ve davranışa sosyal tercihler üzerinden nasıl eşleştiği incelenir.

Bu makalede tenis maçlarında oyuncuların diğer oyuncuların vuruşlarına (hamlelerin) nasıl cevap vereceği modellenecektir. Bu yüzden en son bahsi geçen sosyal tercihlerle ilgili modeller bu tür tekrarlı oyunlara çok uygun değildir. Aynı şekilde daha çok başlangıç koşullarını açıklamak için kullanılan Bilişsel Hiyaerarşi modelleri de tenis maçlarındaki "sevis vole" oyunu gibi kısa süren oyunlarda işe yarasa da üst düzey oyuncularda oyuncuların topu geri çevirme olasılığı arttıkça birkaç adımlık kısa stratejik düşünce sayısı çok işe yaramayabilir. Karmaşık öğreticilik de kısa süreli bir oyunda-tenis maçında çok uygulanabilir değildir.

Geriye uygulanabilir olarak daha uygun modeller olarak Var Yok modelleri ve Tecrübe Ağırlıklı Çekim Modelleri kalır. Bu makalede tenis oyuncularının küçük hatalar yapabileceği ancak diğer oyuncuların ne yapacağıyla ilgili genellikle doğru kanılar oluşturacakları var sayımıyla hareket edilerek Var Yok modeli alan verisine uygulanacaktır.

Var yok Modelleri kanılarla ilgili hataların yapılmadığı ancak tepkilerin gürültülü ve stokastik olabildiği varsayımıyla yola çıkar (McKelvey and Palfrey, 1995). Yani oyuncular her zaman daha yüksek çıktıları olan hamleleri seçmeye çalışırlar ancak her zaman başaramazlar.

Genel olarak i oyuncusunun j'ninci sratejisinin 0 döneminde K seviyesinde düşünülürken cazibesi (attraction), diğer oyuncuların tüm olası s^h_{-i} stratejilerinin birinci dönem olasılıklı $P^h_{-i}(1)$ getirilerinin i oyuncusu j stratejisini oynarken çıktılarının ihtimalli toplamı olarak verilir. Bu durumda j stratejisinin cazibesi :

$A^j_i(0|K) = \sum^{m_{-i}}_{h=1} \pi_i(s^j_i, s^h_{-i})\, P^h_{-i}(1)$ (1)ile tanımlanır. *i* oyuncusunun *j* stratejisini oynama olasılığını cazibeye dayalı bir logit fonksiyonu olarak yazarak

$P^j_i(1) = e^{\lambda \cdot A^j_i(0)} / \sum^{m_i}_{h=1} e^{\lambda \cdot A^h_i(0)}$ (2) elde edebiliriz (Camerer, Ho ve Chong, 2003). λ burada gürültü parametresidir. λ sonsuza giderken olasılık Nash dengesine gider. Yani Nash bireylerin hata yapmamasının özel bir sonucudur. Var-yok modellerinde en iyi tepkiler verilirken yapılan hataları karmaşık durumlarda maruz kalınan karar hatalarınına veya oyuncularun gözlemleyemediği saklı çıktı dağılımlarına bağlamak mümkündür. Yani Var-Yok dengesi ve Nash dengesi ilişkisi stokastik ve deterministik tercih modelleri arasındaki ilişkiye benzer. Var-Yok modelleri genellikle Nash Dengesinden sapmaları açıklamak için kullanılırlar. Bir oyuncu *i* tarafından yapılan küçük hatalar diğer bir oyuncunun *j* çıktılarında büyük farklılıklara sebep olabilir ve Var-Yok tahmini Nash dengesinden oldukça farklılaşabilir. Var-Yok tahmini aynı zamanda yapısal değişikliğin davranışı nasıl açıklayabileceğini göstermek için de kullanılabilir Crawford, Costa-Gomes, ve Iriberri, 2007).

1.1. Asimetrik Saklambaç Oyunu ve Tenis:

Asimetrik saklambaç oyunu çıktıların simetrik ve eşit olmadığı durumlarda Saf Nash dengesi olmadığında ya da tek bir Bayesyen Nash Dengesi olduğu oyunları tanımlar. Çıktıların simetrik olmadığı (Korkak) Tavuk Oyunu gibi oyunlarda Basit Nash Dengesi olmasa da Bayesyen Oyun Oynandığında bir Nash Dengesine ulaşılabilir. Bayesyen Oyunlarda, strateji uzayı, çıktı fonksiyonu, olası tipler, ve öncel olasılık dağılımının güçlü bir varsayımla ortak bilgi olduğu varsayılır.

Bayesyen Oyunlarda oyuncuların tipleri $\theta_i \in \Theta_i$; ve tiplerinin olasılığı $P(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ iken koşullu olasılığı $P(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ verir. i kendi tipini bilir ve beklenen çıktısını $p(\theta_{-i} \mid \theta_i)$ diğerlerinin tiplerinin $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_I)$ koşullu olasılığına göre değerlendirir.

Çıktı fonksiyonu, olası tipler, ve öncel olasılık dağılımı bilinirken i oyuncusunun beklenen çıktısı olası tipler sürekli iken $U(s_i', s_{-i}, \theta_i) = \int u_i(s_i', s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})P(d\theta_{-i} \mid \theta_i)$ olur. Strateji profili $s(\cdot)$ tüm $i \in I$ ve $\theta_i \in \Theta_i$ Bayezyen Nash dengesinde $s_i(\theta_i) \in \arg\max ui(s_i', s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})P(d\theta_{-i} \mid \theta_i)$ olarak tanımlanır. Yani Bayezyen Nash dengesi her i oyuncusunun saf stratejilerinin Θ_i'den S_i aktarılmasıyla elde edilen "genişletilmiş oyun" Nash dengesidir. Sürekli tiplerin (kompakt) ve sürekli strateji setlerinin (kompakt) olduğu bir Bayesyen oyunda çıktı fonksiyonları kendi stratejilerinde konkav ve sürekli iken saf strateji Nash dengesi ortaya çıkar. Bu haliyle aslında teoremin altındaki fikirler tam bilgi altındaki ispatlar ve teoremlerden farklı değildir Levin, 2002).

Ancak oyuncu tiplerinin θ_i ve tiplerin olasılığının $P(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ tam bilinmediği durumlarda veya fayda maksimizasyonu $\arg\max u_i$ (bir ya da birkaç oyuncu tarafından) rasyonel olarak yapılmadığında sonuç Nash Dengesinden farklılaşabilir (Levin, 2002).

Var-Yok Modelleri tam da burada rasyonelama hata yapabilenlerin olduğu durumda çözüme girer. Oyuncuların rasyonel olmaya çalışsa da hata yapabildikleri durumları açıklamak için kullanılabilir. Saf Nash Stratejisi olmayan bir oyunla yola çıkılıp karışık Nash Dengesine ulaşılır.

Diyelim ki bir Tenis maçında iki oyuncu da forehand ralli tercih etsin ve bu durumda birinci ve ikinci oyuncuların çıktıları da sırasıyla 3 ve 1 olsun, ya da her ikisi de backhand ralli tercih eden oyuncularsa çıktılar sırasıyla 5 ve1 olsun. Oyunculardan biri forehand ralli diğeri backhand tercih ettiği durumlarda ise çıktılar 0, 2 olsun. Bu durumda oyunun saf Nash dengesi olmaz. Ancak oyuncuların rasyonel olduğu varsayımıyla yola çıkarsak karışık Nash Dengesine ulaşabiliriz.

Oyuncu 1 / Oyuncu 2		Kısa Ralli q	Uzun Ralli 1-q
Kısa Ralli	p	3, 1	0, 2
Uzun Ralli	1-p	0, 2	5, 1

Bu özel oyun için denge p=1/2 ve q=5/8'de gerçekleşir. Yani birinci oyuncu için forehand ve backhand ralli oynama konusunda rakibi kararsız bırakan olasılık ½ olasılıkla forehand ralli tercihi , ikinci oyuncu için ise birinci oyncuyu kararsız bırakacak olasılık 5/8 olasılıkla forehand ralli tercihidir. Gerçek bir oyunda veya deneysel çıktılarla tekrarlanan bir oyunda bu olasılıklardan sapmak rasyonellikden sapmayı göstermektedir. Yani ampirik frekanslarla Nash dengesi frekansları farkı aslında ya kanılarla ilgili bir yanılgıyı (CH Tipi yanılgı) ya da uygulama güçlüğünü Var-Yok Modeli tipi sapma göstermektedir.

Bu makalede profesyonel tenis oyuncularından yola çıkılacağı için hatanın daha çok uygulamada yapıldığı varsayılmıştır. Ayrıca makalede oyuncuların tipleri önceden belirlenmiş ve olası stratejileri ve çıktıları eski maçlardaki ralli verilerinden derlenmiştir. Daha önceki maçlardaki ortalama ralli uzunluğu oranları bir sonraki maç için oynanacak kısa ve uzun ralli için bir beklenti oluşturur. Burada her oyuncu ralli tercihlerinin bir kısmını kısa bir kısmını uzun oynamak için strateji oluşturur. Elbette ralli uzunluğu oranları bu strateji tercihi oyuncunun kendi oyun yapısına, fiziki yapısına, yaşına, kondisyonuna,kort tipine ve başka özelliklere göre de değişebileceği gibi rakibin özelliklerine göre de değişebilir. Bu özelliklerin hepsini derlemek zor olsa da bu enformasyon zaten geçmiş verilerinde gömülüdür.Makalede amaç tüm açıklayıcı değişkenleri analiz etmek değil, karar almada bu geçmiş verilerinden yola çıkarak bir cazibe fonksiyonu oluşturmak ve tercih olasılıklarını ve maçlardaki çıktıları olabildiğince iyi açıklamaktır.

Her ne kadar spor ekonomisi çok uzun zamandan beri iktisat biliminin bir alt alanı olsa da, spor verilerinin iktisatta birey davranışını özellikle de rekabetçi ve ve işbirlikçi oyun teorisinde karar alma mekanizmalarını anlamada ve karar alma modellerinin geliştirilmesinde kullanılması göreceli olarak oldukça yenidir. Kahneman'a göre de spor standard koşullar altında önemli kararların alındığı bir deney alanıdır. Karar almanın uygulamalarının en iyi alanlarından biridir (Bar-Eli, Krumer ve Morgulev, 2020). İktisatta laboratuvar deneyleri her ne kadar bireysel karar almaya çok fazla katkıda bulunsa da, bu deneylerde alınan kararların gerçek hayatta alınanlara çok benzememesi, deneylerin verdiği ödüllerin genellikle hayat değiştirecek kadar büyük olmamaları, ne yapılırsa yapılsın kurguyu eğretileştirir. Aumann'a göre de gerçekte bu tür karara denekler alışık değildir ve onların hayatını gerçek anlamda etkilemez (Hart, 2005). Oysa spor dünyasında alınan kararlar sonrasında ödüller ve cezalar genellikle çok büyüktür. Ayrıca yeteneksel farklılıklar, yaş ve teşvik farklılıkları gibi değişkenler spor verilerinden kolayca daha detaylı incelemelerin yapılabimesine de olanak sağlar. Üst düzeyde spor yapalnlar genellikle sporun stratejilere ve psikolojiye nasıl bağlı olduğunu n bilincindedirler. Dünyadaki en iyi kadın satranç oyuncusu kabul edilen Judit Polgar satrancın %30-%40 arasında psikoloji olduğunu ve "objektif" satranç oynamak yerine bilinçli olarak rakibinin oyununu öğrenip ona göre strateji tercih ettiğini belirtmiş ve bilgisayara karşı kazanmanın bilgisayarın kafasını karıştıramayacağınız için daha zor olduğunu belirtmiştir. Yani çok hamle ileriyi düşünebilen satranç oyuncuları bile rasyonel değil duygusal kararlar alabilir veya hata yapabilirler.

Temel iktisat teorileri ve Tenis stratejilerinin ilişkisi özellikle son on yılda birçok makalede incelenmiştir. Tenis'de ödüllerin değeriyle performans arasında ilişki ilk önce González-Díaz, Gossner ve Rogers, (2012) tarafından kurulmuş daha sonra birkaç araştırmada Jetter ve Walker, (2015) da da kullanılmış ve genel anlamda ödül değerindeki artışın performansı artırdığı bulunmuştur. Abramitzky ve diğerleri (2012) tenis oyuncularının tenis hakemlerinin kararlarına itiraz edecekleri zaman optimal karar alma kurallarına uyduklarını göstermiştir. Malueg ve Yates (2010), tenis çıktılarını stratejik efor alokasyonu (ya da sıcak el fenomenini) yarışma teorisi (contest theory) modellerinde kullanmış, stratejik momentumun varlığını bulsa da psikolojik momentuma da bakmış ama bulamamıştır. Gauriot ve Page (2019) ise aksi bir buluntuyla psikolojik momentumun varlığını bulmuştur.

Tenisin kullanılabileceği diğer bir alan da optimal performansdan davranışsal sapmalarlaışlarla ilgilidir. Paserman (2007),Cohen-Zada, Krumer, Rosenboim and Shapir (2017) tenis oyuncularının optimalin yukarısında başarılı olma dürtülerinin maçların önemli anlarında daha fazla "yüzüne gözüne bulaştrmaya" (choking) sebep olduğunu göstermiştir.

2. VERİ SETİ VE METODOLOJİ

Tenis oyuncuları ralli uzunlukları ile ilgili kararlarını belirlerken kendi yeteneklerini, oyun tarzlarını, yaşlarını, kort türünü, sıcaklığı, rakımı ve birçok başka değişkeni dikkate alabilirler. Ancak oyunun nerede sonlanacağı sadece tek oyuncunun değil iki oyuncunun da tercihlerine bağlıdır. Yani neredeyse tüm tenis oyuncuları kendi servislerinde oyunun belki ilk iki üç hamlesini oyunun lideri olmanın avantajıyla kurgulayabilirler. Ancak liderin (servis atanın) uygulama hataları ve takipçinin (karşılayanın) hamleleri okuyarak geri çevirebilme yetenekleri oyunun uzamasına sebep olabilir ya da liderin kanılarını oluşturduğu patikatan sapmalara sebep olabilir. Her ne kadar oyuncular sayıları kısa veya uzun oynamak için farklı stratejiler belirlemiş olsalar da oyunun bittiği strateji her iki oyuncu için de ortaktır. Yani 1-3 vuruş için servis atan lider oyuncu ya geri dönmeyen bir servis atmış (ace gibi) ya da servis vole oyunuyla sayı almıştır, ya da takipçi servisi iyi okumuş ve karşılama vuruşunda sayı almış ya da karşılama vuruşunda lideri hataya zorlayıcı bir vuruş yapmış olabilir. Yani oyun lider de kazansa, takipçi de kazansa kısa bir raliyle bitmiş olur. Burada rallleri karşılaştırırken oyuncuların stratejilerini değil bittiği ortak çıktılar dikkate alınacaktır. Yani çıktılar aşağıdaki tabloda x ile gösterilen noktalarda olacaklardır. Bu çıktıların her oyuncu için cazibesi (attraction) farklıdır ve bu cazibe yukarıda da formülize edilen kazanma olasılıklarına bağlıdır.

Tablo 1: Oyunun Bayesyen Nash Dengeleri

		2. Oyuncu			
	Ralli	1-3 Vuruş	4-6 Vuruş	7-9 Vuruş	10+
	1-3 Vuruş	x			
1. Oyuncu	4-6 Vuruş		x		
	7-9 Vuruş			x	
	10+				x

Yani oyuncular stratejilerini yaklaşık olarak belirleseler de ne stratejiye, ne de çıktıya tam anlamıyla hakim olamazlar. Bu durumda her sayı, oyun, set yeni baştan dinamik ve tekrarlı (ve hatta her yeni enformasyonla bazen kanıları bile değiştirerek) olarak yeniden oynanır. Tam Bayesyen Bash dengesi oyuncuların farklı çıktılarına (bu durumde sayıyı alma olasılığı) göre değişiklik gösterir. Bu durumda oyuncuların olası ralli tercihleri cazibe faktörlerine göre belirlenmeye çalışılmış ve bu tercihlerin gerçek sonuçlara uygunluğu test edilmiştir.

Veri setleri tennisabstract.com, ultimatetennisstatistics.com ve atptour.com sitelerinden ATP turundaki ilk 10 sıradaki oyuncunun 2020 ve (kısa sezondan dolayı bir kısmının) 2019'da oynadığı 16 maç derlenmiş ve bu maçlardaki tabloda belirtilen ralli uzunluklarını oyuncuların oynama yüzdeleri ve bu rallileri kazanma yüzdeleri derlenmiştir. Daha sonra bu on oyuncu için bu olasılıkların ortalamaları bulunmuş ve oyuncuların ortalama sayı kazanma olasılıklarının ralli uzunluğuyla ilişkisi dışında oyuncuların maçtan maça ralli tercihlerinin değişiklikleri (standard sapma olarak) ve farklı ralli uzunluklarında kazanma olasılıklarının değişimleri (standard sapmaları) da tespit edilmiş ve bunların da ralli tercihlerini etkileyip etkilemediği de incelenmiştir.

Tenis oyunu aslında daha önce de bahsedilen Saklambaç Oyunu gibi aslında tarafların dengeden kaçtıkları bir oyundur. Her oyuncu top kendi yarı sahasına geldiğinde diğer sahaya atmaya çalışır ve teoride kanıları doğru, oyuncular hata yapmazken ve oyuncuların kondisyonu Süpermen düzeyindeyken ralli sonsuza kadar sürer. Ancak pratikte hem oyuncular her yapmaya çalıştıklarını uygulayamaz hem de rakibin hamlesiyle ilgili yanlış kanı oluşturabilirler. Yani oyun aslında karşılıklı her hamleyi çizmekle ilgili olsaydı, Bilişsel Hiyerarşi Var Yok Modeli (CH-QR) kullanılabilirdi. Ancak burada karşı tarafın oyuna ne kadar ısrarcı davranabileceği veya ne kadar kısa sürede oyunu sonlandırmaya çalışacağıyla ilgili kanılar doğru olsa bile rakibin her vuruşu az ya da çok risk içerir.

Normalde Davranışsal Oyun Teorisinde cazibe fonkisyonları $A^j{}_i$ çıktı ve diğer oyuncuların olasılıklarının kanılarına bağlıdır. Bu kanılar da daha önceki oyunlardan (maçlardan) toplanan enformasyonlarından derlenir.

3. ÇIKTI VE TARTIŞMA

Makalede klasik Var-Yok Modellerinden farklı olarak cazibe sadece çıktı ve diğer oyuncuların tercih olasılığına değil aynı zamanda oyuncunun kendi tercihlerini ne kadar istikrarlı olarak uygulayabildiğne yani karar alıcının önceki oyunlardan (maçlardan) topladığı (kendisiyle ilgili) varyans enformasyonlarına da dayalıdır. Bu anlamda aslında özelliklede ilk ondaki oyuncuların genel olarak istatistikleri birbirine çok yakın olduğundan modeli sadece geçmiş dönem çıktılarına (bu durumda kısadan uzuna rallileri kazanma oranına) bağlandığında kısa ralli veya uzun ralli oynama olasılığı benzer oranları verir. Ancak işin içine oyuncuların varyansları/standard sapmaları da girince oyuncuların ralli tercihlerini açıklamak daha kolay olur. Oyuncuların genrllikle ralli uzunlukları arttıkça ralliyi kazanma olasılıkları farklılaşsa da asıl farklılaşma dalli uzunluklarının standard sapmalarında gözlemlenebilir. Örneğin Djokovic ve Federer'in kısa ralli (1-3vuruş) kazanma olasılıkları (sırasıyla (52.32% ve 52.57%) ve çok uzun ralli (10+) kazanma olasılıkları (56.02% ve 53.18%) birbirine yakın olsalar da Djokovic rallilerin 14.06%'sını 10+ ralli oynasa da Federer için bu oran 7.23%'dür. Yani neredeyse Djokovic'in her iki uzun rallisine karşılık Federer yalnızca bir uzun ralli oynamakta ve rallileri uzatmamayı tercih etmektedir. Bu farkı açıklamak ancak iki oyuncunun ralli kazanmadaki istikrarıyla mümkün olur. Djokovic'in standard sapması kısa rallide 7.57% 'den uzun rallide %12.14'e çıkarken, Federer'de bu oran kısa rallide 7.28%'den uzun rallide 26.39%'a çıkar. Yani ralli uzarken Djokovic'in kazanma belirsizliği artsa da bu artış %63'de kalır Federer'de ise bu artış %263 olur. Bu da Federer'in göreceli uzun ralli'den kaçınmasını açıklar.

Sonuç olarak oyuncular her ne kadar Bayesyen Oyunlarda rakiplerinin çıktılarını dikkate alarak olasılık tercihlerini belirleseler de bu tür çıktıların belirsiz olduğu dinamik oyunlarda aslında kendi oyunlarında elde edecekleri istikrar da tercihlerini belirler. Yani cazibe fonksiyonu oluşturulurken hem rakiplerin farklı stratejileri altında $s^h{}_{-i}$, i oyuncusunun j stratejisi $s^j{}_i$'inin çıktısına $\pi_i(s^j{}_i, s^h{}_{-i})$, hem rakibin farklı strateji oynama olasılığına $P^h{}_{-i}$, hem de i oyuncusunun j tercihi altında ralli istikrarına $\sigma_i(s^j{}_i, s^h{}_{-i})$ ve son olarak bir ralliyi erken bitirmenin cazibe faktörü olarak $\rho^{j'}$lik bir iskonto faktörüne bağlı olarak

$$A^j{}_i(0|K) = \sum^{m\ -i}{}_{h=1} \rho^{j'} \pi_i(s^j{}_i,\ s^h{}_{-i})\ \sigma_i(s^j{}_i,\ s^h{}_{-i})\ P^h{}_{-i} \quad (1)$$

şeklinde tanılmanmıştır.

Bu cazibeye göre i oyuncusu j stratejisini logit fonksiyonuna göre

$$P^j{}_i(1) = e^{\lambda \cdot A^j{}_{i(0)}} / \sum^{m\ i}{}_{h=1} e^{\lambda . A^h{}_{i\ (0)}} \qquad (2)$$

olarak belirler.

Oyunun kısa (1-3 hamle), orta (4-6 ve 7-9) veya uzun 10+ ralli sonucu sonlanması karşılıklı oyuncuların iki oyuncunun ralli tercihlerinin çarpımı sonucu belirlenebilir.

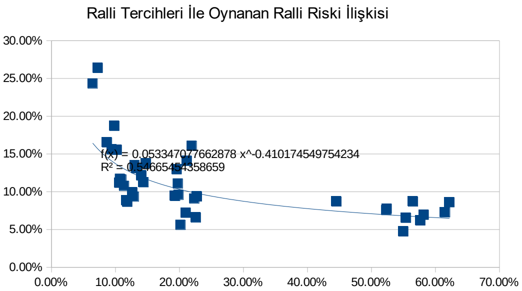
Tablo 2: Ralli Tercihleri'nin Nash Çıktısı

			2.Oyuncu			
			p_2^k	p_2^o	p_2^u	$p_2^{çu}$
			1-3 Ralli	4-6 Ralli	7-9 Ralli	10+ Ralli
	p_1^k	1-3 Ralli	$p_1^k p_2^k$			
1.Oyuncu	p_1^o	4-6 Ralli		$p_1^o p_2^o$		
	p_1^u	7-9 Ralli			$p_1^u p_2^u$	
	$p_1^{çu}$	10+Ralli				$p_1^{çu} p_2^{çu}$

Birinci oyuncunun kısa ralli tercih olasılığı p_1^k ve ikinci oyuncunun kısa ralli tercih olasılığı p_2^k iken rallinin kısa olarak sonlanması $p_1^k p_2^k/(p_1^k p_2^k+p_1^o p_2^o +p_1^u p_2^u +p_1^{çu} p_2^{çu})$ kısa rallinin tüm ralli olasılıklarının çarpımına bölünerek bulunabilir. Yani bir oyuncunun uzun, bir oyuncununsa kısa ralli tercih ettiği bir oyunda çıktı sadece ikisinden birinin tercihi olabileceği gibi ikisinin istemediği sonuç da çıkabilir. Nihayetinde her zaman iki kişi için de simetrik olacaktır. Yani çıktı matrisinde stratejilerin simetrik olmadığı yerlerde çıktı elde edilmez. Burada oyuncuların başlangıç niyetleri değil sonuçta ortaya çıkandan geriye dönük oranlar dikkate alınarak stratejilere yönelik çıkarımlar yapılmaktadır. Yani tek bir maç için olmasa da her oyuncu için 15-20 maçlık geriye dönük veri toplandığında oyuncuların ralli tercihleri ve olası stratejileri için oldukça güvenilir bir veri seti elde edilmiş olur. Elbette veri seti ne kadar derinleşirse oyuncu ile ilgili enformasyon ve dolayısıyla kanılarda okadar detaylandırılabilir. Bu makalede her oyunucunun son yıllarda oynadığı 16 maçın ortalaması alınmıştır. Her maçta ortalama 100-200 sayı alındığı dikkate alınırsa aslındabu oyuncuların 1500-3000 arasında sayı tercihini ve bu tercihlerdeki sapmaları toplamış oluruz. Ek 1'deki tabloda ATP turundaki en üst sıradaki 10 oyuncunun bu 16 maçtaki ortalama ralli uzunlıkları, bu rallileri kazanma oranları ve bunların standard sapmaları verilmiştir. Ayrıca bu oyuncuların hepsinin genel ortalamaları ve standard sapmaları da hem hesaplar yapılırken oranlama için ve oyuncularınotyalamadan sapmaları için fikir bermiştir.

Makaleye başlarken aslında ilk on oyuncuya odaklanmadan 2020 yılında ilk 50'deki oyuncuların ATP 1000 ve Grand Slam ve ATP Finallerindeki maçların tamamına bakılıp, oyuncuların yaş farkları, sıralamadaki farkları gibi faktörlerin ralliuzunluğunu etkileyip etkilemediğine veya oyuncuların ace ve çift hata gibi değişkenleri oyuncunun sayıyı kısa süredebitirme sinyali olarak alınarak uzun rallilerle ilişkisi incelenmiş ancak bunların hiçbirinde anlamlı ve yüksek ilişki katsayısı veren sonuca ulaşılamamıştır. Bu yüzden daha sonra yapılan araştırma oyuncu sayılarını sınırlayıp onların stratejilerini daha detaylı inceleyecek şekilde oyuncuların daha fazla maç incelemeye dahil edilmiştir.

Grafik 1: Ralli Tercihleri ve Rallilerin Standard Sapmaları'nın Dağılımı



Veri seti incelenince ilk dikkati çeken özellik, oyuncular bir rallinin varyansı / standard sapması ne kadar düşükse o ralliyi o kadar daha çok oranda oynamaya çalışmaktadırlar. Bu Grafik 1'de de gösterilmiştir. Aynı zamanda sınırlı veri setine rağmen ralli süresi oynama oranıyla oldukça yüksek ilişkiye R^2=55% sahiptir. Hatta sadece uzun rallilere odaklanınca bu ilişki %75'e çıkmaktadır.Bu ilişki cazibe fonksiyonuna rallilerin standard sapmalarının da katılmasının temel sebebidir.

Diğer taraftan tenisde oynanan her sayı erken bir anlaşma için payını azaltmaya razı olunan oyuncuların çıktılarının sabırlı olabilmelerine de bağlı olduğu T dönemlik Ültimatom oyunlarını da anımsatır. Çıktının paylaşımı görecelisabır, son hamleyi/ teklifi yapma avantajı ($T < \infty$ için), ilk hamleyi yapma avantajo (eğer iskonto $\delta < 1$ise) bağlıdır.

Bu tür oyunlarda rantın dağlımı göreceli sabırlılığa, son teklifi yapma avantajına ve ilk teklifi yapma avantajına bağlıdır. Bu makalenin konusu dışında olsa da servis atanın ilk hamle avantajının olduğu göreceli sabırlılığın çok önemli avantaj sağladığı tenis oyununu servis atan ve karşılayanların verilerini ayıklayarak incelemek oyunların deneysel dinamik analizi için çok katkıda bulunabilir. Bu makale her ne kadar dinamik analiz yapmasa da cazibefonksiyonuna sabır katsayısı olarak iskonto oranı ρ eklenince rallileri gerçeğe oldukça yakın sonuçlarvermeye başlamışlardır.

Yukarıda oluşturulan cazibe fonksiyonunda $\pi_i(s^j_i, s^h_{-i})$ oyuncuların farklı rallilerdeki kazanma oranları olarak alınmış ve Bayesyen Nash çıktısı elde edilmeye çalışılırken ikinci oyuncunun birinci oyuncunun ortalama sayı alma başarısının yüksek olduğu durumları daha düşük olasılıkla oynaması prensibinden yola çıkılmıştır. Örneğin Nadal 4-6 arasındaki rallilerde buradaki veri setinegöre en başarılı tenisçidir. Bu durumda rakipin en az tercih edeceği strateji oyunu 4-6 vuruşluk ralliyle bitirmek olur. Ya da tam tersi 10+ vuruşluk rallilerde Nadal'ın başarısı düşmektedir. Bu durumda rakip 10+ ralli oynama stratejisinin olasılığını artırmaya yani daha uzun ralliler oynamaya çalışır.

Diğer taraftan oyuncunun rallilerindeki kendi standard sapması da $\sigma_i(s^j_i, s^h_{-i})$ biraz önce belirttiğimiz gibi o stratejinin cazibesini azaltabilir. Örneğin Federer ve Rublev'in uzun rallileri kazanma oranı %53 civarındadır ancak Fererer'in uzun ralli istikrarsızlığı onun çok daha fazla kısa ralli oynamasına sebep olur. Yani cazibe fonksiyonunda standard sapmanın cazibe azaltıcı bir etkisi vardır.

İskonto faktörü ρ sadece oyuncuya değil iklime, kort türüne, maçın seviyesineve daha birçok faktörebağlı olarak değişebilir. Ancak burada sabit kabuledilmiş ve gürültü katsayısı λ ile birlikte rallileri enoptimal açıklayıcı olabilecek değerlere sabitlenmişlerdir.

Elbette ilk 10dakiher oyuncunun farklı maçlarını karşılaştırmak mümkündür.Ancak bu 45 farklı karşılaştırmayı gerektirir ki bu makalenin alanını aşar. Ancak elde edilen verilerden birkaçı için karşılaştırma Ek1'de verilmiştir.

4.SONUÇ

Bu makalede oyuncuların rakipleriyle ya da oyunla ilgili genel olarak doğru kanaatleri olsa bile hamle hatası yapabildikleri Davranışsal oyunlarda Var-Yok Modeli olarak isimlendirilen modelin zaman iskontolu ve ralli uzunluklarındaki çıktılar kadar bu çıktıların standard sapmalarının da tekil oyuncuların ralli tercihlerini açıklamak için kullanıldığı ve zaman ve ralli tercihleriyle ilgili farklı tercihleri olan oyuncuların maçlarının hangi rallilerde hangi ihtimale sonlanacağını tahmin etmeye çalışan bir model oluşturulmuş ve standard Var-yok modeline çıktıların yanı sıra çıktıların standard sapmalarını eklemenin modelin tahminlerini oldukçaiyileştirdiği bulunmuştur. Yani profesyonel tenisçiler de aynı finans yatırımcıları gibi sadece beklenen çıktı üzerinden değil onun dalgalanmasını ve ne zaman bu çıktının elde edeceğini de önemseyerek rallileri uzatmaya veya kısaltmaya karar verirler.

KAYNAKÇA

Abramitzky, R. Einav, L.,Kolkowitz, S. ve Mill R. (2012) “On the optimality of line call challenges in professional tennis”, International Economic Review, 53 (3) (2012), pp. 939-964.

https://www.atptour.com

Bar-Eli,M, Krumer,A. ve Morgulev,E. (2020). “Ask not what economics can do for sports - Ask what sports can do for economics”, Journal of Behavioral and Experimental Economics, Volume 89, https://doi.org/10.1016/j.socec.2020.101597

Camerer, C. (2003) Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction. Princeton: Princeton University Press.

Camerer, C. & Ho, T. (1999) “Experience-weighted attraction learning in normal form games”, Econometrica, 67, 827–74.

Camerer, C., Ho, T., & Chong, K. (2003) “Models of thinking, learning, and teaching in games”, American Economic Review, 93(2), 192–5.

Crawford, Vincent P., and Nagore Iriberri. 2007. “Level-k Auctions: Can a Nonequilibrium Model of Strategic Thinking Explain the Winner's Curse and Overbidding in Private-Value Auctions?” Econometrica, 75(6): 1721-1770.

Cohen-Zada, D. Krumer, A. Rosenboim, M. ve Shapir,O.M. (2017).“Choking under pressure and gender: Evidence from professional tennis”, Journal of Economic Psychology, 61 (2017), pp. 176-190.

Gauriot, R ve Page L. “Does success breed success? A quasi-experiment on strategic momentum in dynamic contests”, The Economic Journal, 129 (624) (2019), pp. 3107-3136.

Goeree J.K. ve Holt C.A. (1999) “Classroom games: Rent-seeking and the inefficiency of non-market allocations”, Journal of Economic Perspectives, vol. 13, pp. 217 - 226, http://dx.doi.org/10.1257/jep.13.3.217

González-Díaz J, O. Gossner ve Rogers B.W. (2012) “Performing best when it matters most: Evidence from professional tennis”, Journal of Economic Behavior & Organization, 84 (3) , pp. 767-781.

Harsanyi, John C., 1967/1968. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, I-III." , Management Science 14 (3).

Hart,S.(2005) “An interview with Robert Aumann”, Macroeconomic Dynamics, 9 (05) , pp. 683-740.

Jetter, M. Ve Walker J.K. (2015) “Game, set, and match: Do women and men perform differently in competitive situations?”, Journal of Economic Behavior & Organization, 119, pp. 96-108.

Levin, J. (2002) Dynamic Games with Incomplete Information,https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20 203/DynamicGames.pdf.

Malueg, D.A. ve Yates A.J. (2010) “Testing contest theory: evidence from best-of-three tennis matches”, The Review of Economics and Statistics, 92 (3), pp. 689-692.

McKelvey, R. & Palfrey, T. (1995) “Quantal response equilibria for normal form games”, Games and Economic Behavior, 10, 6–38.

Nash, J. F. (1950) “Equilibrium points in n-person games”, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 48–9.

von Neumann, John, ve Oskar Morgenstern. 1944. Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Paserman,M. D.(2007) ”Gender differences in performance in competitive environments: evidence from professional tennis players” ,IZA Discussion Paper No. 2834.

Schelling, T. C. (1960) The Strategy of Conflict. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Selten, R. (1975) “Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games”, International Journal of Game Theory, 4, 25–55.

https://tennisabstract.com

https://ultimatetennisstatistics.com/